CdL in Matematica, Istituzioni di Probabilità (773AA)

A.A. 2023/24 - Appello del 2024-06-04

La durata della prova è di **120 minuti**. *Fornire risposte dettagliate.*

Problema 1

Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false (in generale), fornendo giustificazioni adeguate.

1. Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo stocastico a valori reali e tale che per ogni $t \geq 0$ $\mathbb{E}\left[X_t^2\right] < \infty$. Allora esiste un processo gaussiano $(Y_t)_{t\geq 0}$ tale che per ogni s, $t \geq 0$ si abbia $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t]$, $\mathbb{E}[X_s X_t] = \mathbb{E}[Y_s Y_t]$.
2. Se $(X_t)_{t\geq 0}$ è un processo di Feller omogeneo su uno spazio topologico compatto E, associato a una funzione di transizione $(P_t)_{t\geq 0}$, e $\Phi : E \to E$ è un omeomorfismo, allora $(\Phi(X_t))_{t\geq 0}$ è pure un processo di Feller omogeneo sullo spazio degli stati E, per una opportuna funzione di transizione.
3. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ boreliana e tale che, per ogni martingala $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (definita su un qualsiasi spazio di probabilità munito di una filtrazione), il processo $(f(M_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è una martingala. Allora esistono a, $b \in \mathbb{R}$ tali che $f(x) = ax + b$.

Una soluzione:

1\. Vera: infatti è sufficiente notare che la funzione di covarianza $C(s,t) := Cov(X_s, X_t)$ è semi-definita positiva, e quindi per quanto visto nel corso (conseguenza del teorema di estensione di Kolmogorov) esiste un processo gaussiano con tale funzione di covarianza e stessa funzione di media di X.

2\. Vera: poiché $\Phi(X_t) \in A$ se e solo se $X_t \in \Phi^{-1}(A)$, il processo $\Phi(X_t)$ è di Markov con funzione di transizione $\tilde{P}_t(x, A) = \mathbb{E}[\Phi(X_t) \in A | \Phi(X_0) = x] = P_t(\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(A))$, che è Feller essendo Φ^{-1} continua.

3\. Dati $x_0 \leq x_1$ e $\lambda \in [0,1]$, consideriamo una martingala tale che $M_0 = (1-\lambda)x_0 + \lambda x_1$ e $M_1 = x_0$ con probabilità $(1-\lambda)$, $M_1 = x_1$ con probabilità λ, e poi $M_n = M_1$ per $n \geq 2$. Poiché $f(M_n)$ è una martingala, il suo valore atteso è costante, e si trova

$$f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) = (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1) = f(x_0) + \lambda(f(x_1) - f(x_0))$$

ossia f è lineare affine nell'intervallo $[x_0, x_1]$. Poiché $x_0 \leq x_1$ sono qualsiasi, ne segue che f è una funzione affine.

Problema 2

Sia $n \geq 1$ e sia $(B_t)_{t\geq 0}$ un moto browniano n-dimensionale, $B_t = (B_t^i)_{i=1}^n$ per ogni $t \geq 0$. Si ponga

$$X_t := |B_t|^2 = \sum_{i=1}^n (B_t^i)^2.$$

1. Mostrare che il processo $X_t - nt$ è una martingala. Dire se è uniformemente integrabile.
2. Dato $R \geq 0$, si ponga $\tau_R = \inf\{t \geq 0 \,:\, |B_t| = R\}$. Mostrare che $\tau_R < \infty$ $\mathbb{P}$-q.c. e
$$\mathbb{E}[\tau_R] = \frac{R^2}{n}.$$
3. Per ogni $i = 1, \ldots, n$, si ponga $M_t^i := \int_0^t B_s^i dB_s^i$ e si mostri che $(X_t^{-1/2})_{t\geq 0} \in L^2_{\mathrm{loc}}(M^i)$.
4. Mostrare che il processo $(X_t)_{t\geq 0}$ è una soluzione dell'equazione differenziale stocastica
$$dX_t = 2X_t^{1/2} dW_t + ndt$$
dove $(W_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale (opportunamente definito).

Una soluzione:

1. Ricordiamo che nel corso abbiamo già mostrato che $W_t^2 - t$ è una martingala quando W è un moto browniano (anche rispetto ad una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$). La somma di martingale (rispetto alla stessa filtrazione) è una martingala, quindi anche il processo X_t lo è. La martingala non è uniformemente integrabile. Se lo fosse, dovrebbe essere limitata in L^1, ma vale
$$\mathbb{E}[|X_t|] = t\mathbb{E}\left[|Z^2 - 1|\right] \to \infty$$
dove Z è una gaussiana standard.

2. Abbiamo visto nel corso che $\limsup_{t\to\infty} W_t = \infty$ quando W è un moto browniano. Ne segue che $\limsup_{t\to\infty} |B_t| = \infty$ e quindi $\tau_R < \infty$. Per il teorema d'arresto opzionale, abbiamo per ogni $t \geq 0$ l'identità
$$\mathbb{E}[X_{t\wedge\tau_R}] = 0$$
ossia
$$\mathbb{E}\left[|B_{t\wedge\tau_R}|^2\right] = n\mathbb{E}[t\wedge\tau_R].$$
al tendere di $t \to \infty$ otteniamo che ambo i membri convergono (il primo per convergenza dominata, il secondo per convergenza monotona) e quindi la tesi, visto che $|B_{\tau_R}| = R$.

3. Osserviamo che $X_t^{-1/2}$ è progressivamente misurabile – in realtà continuo e adattato se si pensa a valori $[0,\infty]$ – e vale $d\left\langle M^i, M^i\right\rangle_t = (B_t^i)^2 dt$, quindi
$$\int_0^t X_t^{-1} d\left\langle M^i, M^i\right\rangle_t = \int_0^t X_t^{-1}(B_t^i)^2 dt < \infty$$
poiché $|B_t^i|^2 \leq X_t$. Notiamo anche che l'insieme dei tempi $t \geq 0$ tale che $X_t = 0$ è trascurabile (rispetto a Lebesgue) per quanto visto nel corso sull'insieme degli zeri del moto browniano.

4. Consideriamo il processo
$$W_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t X_s^{-1/2} dM_t^i.$$

Si tratta di una martingala locale, nulla in $t=0$ e tale che

$$d\langle W,W\rangle_t = \sum_{i=1}^n X_t^{-1} d\left\langle M^i, M^i\right\rangle_t = X_t^{-1}\sum_{i=1}^n (B_t^i)^2 dt = dt.$$

Ne segue dal teorema di Paul Levy che $(W_t)_{t\geq 0}$ è un moto browniano reale. Inoltre possiamo scrivere dalla formula di Itô

$$dX_t = 2\sum_{i=1}^n dM_t^i + ndt = 2X_t^{1/2}\sum_{i=1}^n X_t^{-1/2} dM_t^i + ndt = 2X_t^{1/2} dW_t + ndt,$$

che è l'equazione richiesta.